区间评估与决策

1 区间分析简介

2 区间评估与决策的思想

3 区间评估的模型与方法

---区间层次分析法

---区间线性规划

---区间DEA

§1 区间分析简介
（Interval Analysis）

一、区间分析的产生

源于数值计算中的误差分析

某观测值x,误差限ε，则准确值：$[x-\varepsilon,\ x+\varepsilon]$

二、区间数及其四则运算

区间数(Interval Number): $A=[\underline{a},\overline{a}]=\{x:\underline{a}\le x\le\overline{a},x\in\Re\}$

区间数的另一表示： $A=<m(A),w(A)>$ ，其中

$$m(A)=\frac{1}{2}(\underline{a}+\overline{a})\text{ ，}\quad w(A)=\frac{1}{2}(\overline{a}-\underline{a})$$

区间数的四则运算

$$A * B = \{x * y \mid x \in A,\ \ y \in B\}$$ ，其中 $* \in \{+, -, \times, /\}$

$$[\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$$

$$[\underline{a}, \overline{a}] - [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]$$

$$[\underline{a}, \overline{a}] \times [\underline{b}, \overline{b}] = [\min(\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}], \max(\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$$

$$[\underline{a}, \overline{a}] / [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a}, \overline{a}] \times \left[\frac{1}{\overline{b}}, \frac{1}{\underline{b}}\right], \quad 0 \notin [\underline{b}, \overline{b}]$$

特殊地：
$$\frac{1}{[\underline{a}, \overline{a}]} = \left[\frac{1}{\overline{a}}, \frac{1}{\underline{a}}\right], \quad 0 \notin [\underline{a}, \overline{a}]$$

注：(1) $A - A \neq 0$

（2）分配律却不成立，即：

$$A(B+C) \neq AB+AC$$

例：$A=[2,3]$, $B=[1,2]$, $C=[-4,-3]$

$$A(B+C)=[-9,-2],\ AB+AC=[-10,0]$$

$$A(B+C) \subseteq AB+AC$$

区间数四则运算-----应用举例

例：证明 $f(x)=x(x-7)-6-\dfrac{1}{x(x-4)-30}$ 在区间**[8，10]**上没有根。

解：把**x= [8，10]**带入函数，可得：

f([8,10])=……=[1.5,23.9], 0 $\notin$ [1.5,23.9].

三、区间向量与区间矩阵

区间向量：$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$，其中 X_i 为区间数

区间矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$，其中 A_{ij} 为区间数

区间向量与区间矩阵的运算：运算法则同一般的向量和矩阵

区间矩阵的特征值与特征向量：

设**A**为一区间矩阵，λ是一区间数，若存在一个非零区间数向量**x**，使得**Ax＝ λ x**，则称λ为**A**的一个特征值，**x**为**A**对应于λ的一个特征向量。

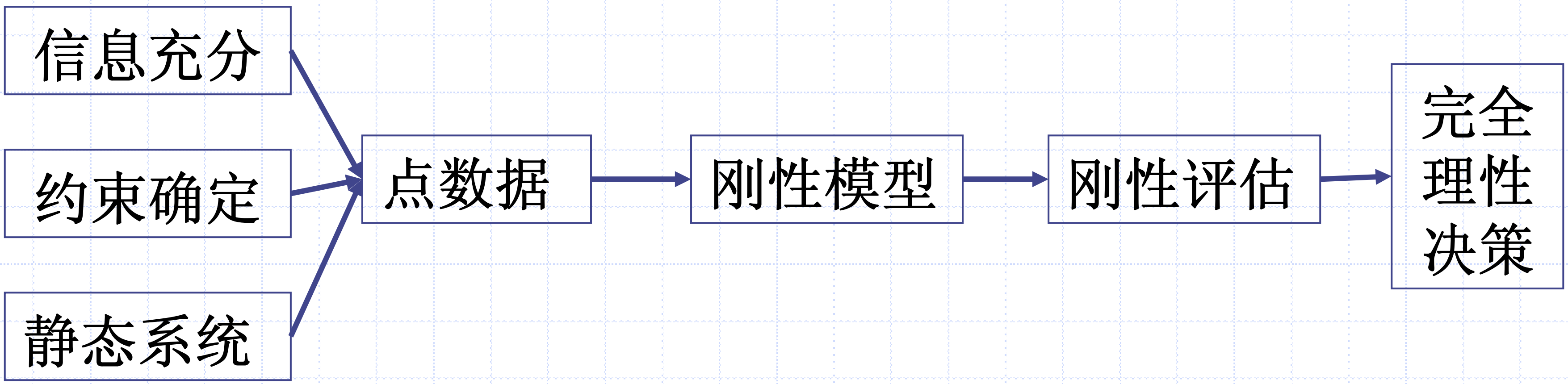
四、区间分析的其它内容

- 区间序列及其收敛性
- 区间函数及其计算
- 区间线性方程组
- 区间积分 $\begin{cases}\text{估计一般函数的积分值区间}\\ \text{求区间函数的积分}\end{cases}$

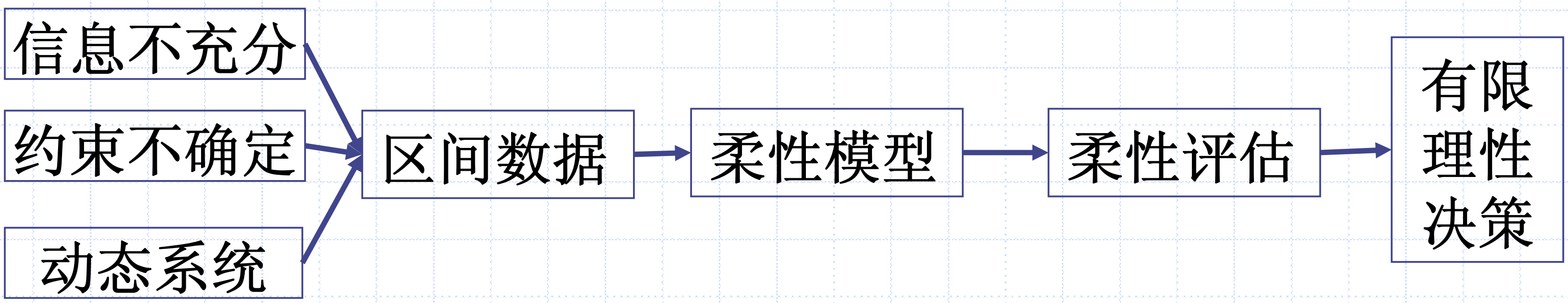
$\vdots \quad \vdots$

§2 区间评估与决策的思想

传统的评估与决策：



区间评估与决策：



注：处理不确定信息的工具

- 模糊数学
- 随机数学
- 区间数学

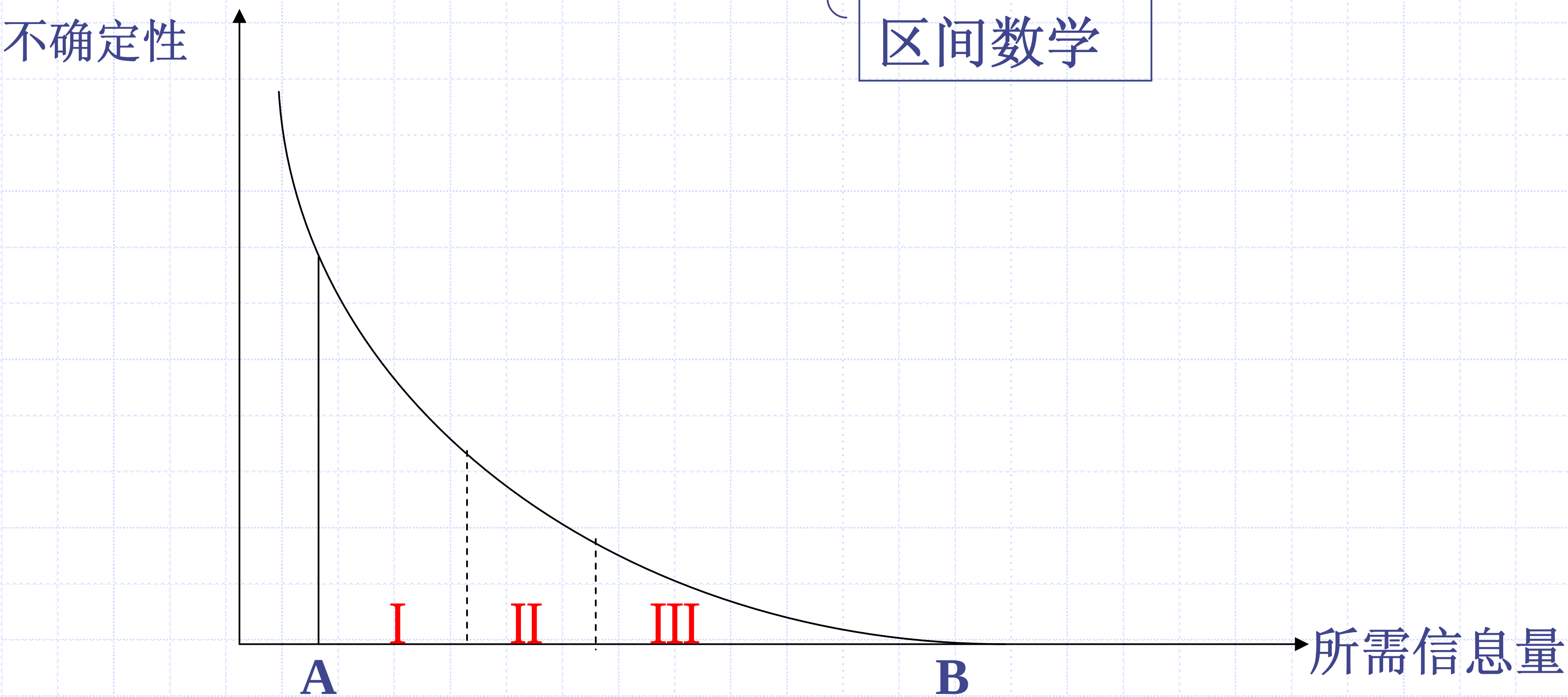


图1-1 三种不确定性分析方法的对比

I：区间分析方法；II：模糊数学方法；III：随机数学方法。

A：最低信息量点，B：完全信息点

区间评估模型举例

例1　　某鸡场有1000只小鸡，用黄豆和玉米混合的饲料喂养，每只鸡每天要吃1-1.3公斤饲料，从营养方面看，每只鸡每天需要0.004-0.006公斤的钙，并至少需要0.21-0.23公斤的蛋白质。已知黄豆的蛋白质含量为48%-52%，钙的含量为0.5%-0.8%，其价格为每公斤0.38-0.42元；玉米的蛋白质含量为8.5%-11.5%，钙的含量为0.3%，其价格为每公斤0.2元；问每天如何配料最节省？

例2 层次分析法中，某决策者对某两方案比较时，认为第一方案比第二方案的重要程度，介于“稍微重要”和“明显重要”之间。

例3 S省拟建一污水处理厂，该方案投资额如表所示，但不知投入数额是否恰当。准备进行效率评价。

评价单元	总投资额（百万元）	年运营成本（十万元）	日处理污水规模（万m^3）
S省拟建	23.0—27.5	8.0—9.5	3.0
A省已建	34.27	1.52	2.3
B省已建	59.25	5.17	5.1
C省已建	18.86	18.01	3.5
D省已建	12.04	5.68	1.2

§3　区间评估的模型与方法

一、区间层次分析法（Interval AHP）

简单回顾——AHP的一般步骤：

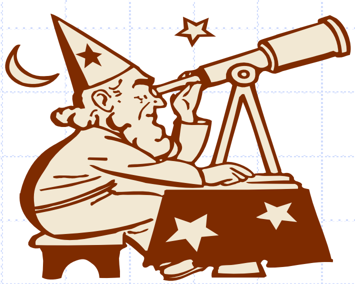
建立递阶层次结构 → 建立判断矩阵 → 层次单排序及一致性检验 → 层次总排序及一致性检验

问题：　（1）构造判断阵时，某些判断没有把握

（2）群组AHP中，各专家意见不尽相同

解决办法

区间标度→区间层次分析法



1 区间判断矩阵的建立

定义： 称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为区间判断矩阵，如果 $\forall i,j$ 均有

1) $a_{ij}=[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]$，且 $1/9\le\underline{a}_{ij}\le\overline{a}_{ij}\le 9$

2) $a_{ij}=\dfrac{1}{a_{ji}}$

例：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & [2,4] & [3,5] & [3,5] \\ [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & 1 & [\frac{1}{2},1] & [2,5] \\ [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [1,2] & 1 & [\frac{1}{3},1] \\ [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [\frac{1}{5},\frac{1}{2}] & [1,3] & 1 \end{bmatrix}$$

区间判断矩阵的构造（只需构造上三角）：

1）对于不确定判断

STEP1. 最可能取值r_{ij} **?**

STEP2. 对该取之的把握程度δ（**1/6**，**1/2**等）**?**

则$a_{ij}=[r_{ij}-\delta, r_{ij}+\delta]$

2）对于群组决策，分别取所有专家的最小值和最大值作为区间数的两端

2 区间判断矩阵权向量的可行域和一致性检验

- 对于实判断矩阵A，一致性定义为 $a_{ij} = \dfrac{a_{ik}}{a_{jk}} \quad \forall i, j, k$

当A完全一致时： $a_{ij} = w_i / w_j$

- 对于区间判断矩阵A，一致性定义为 $a_{ij} = \dfrac{a_{ik}}{a_{jk}} \quad \forall i, j, k$

考虑： $\underline{a}_{ij} \le w_i / w_j \le \overline{a}_{ij}$

称 $S = \left\{ w = (w_1, \cdots, w_n)^T \middle| \underline{a}_{ij} w_j \le w_i \le \overline{a}_{ij} w_j, 且 \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i \ge 0 \right\}$

为区间判断阵A的权向量的可行域。

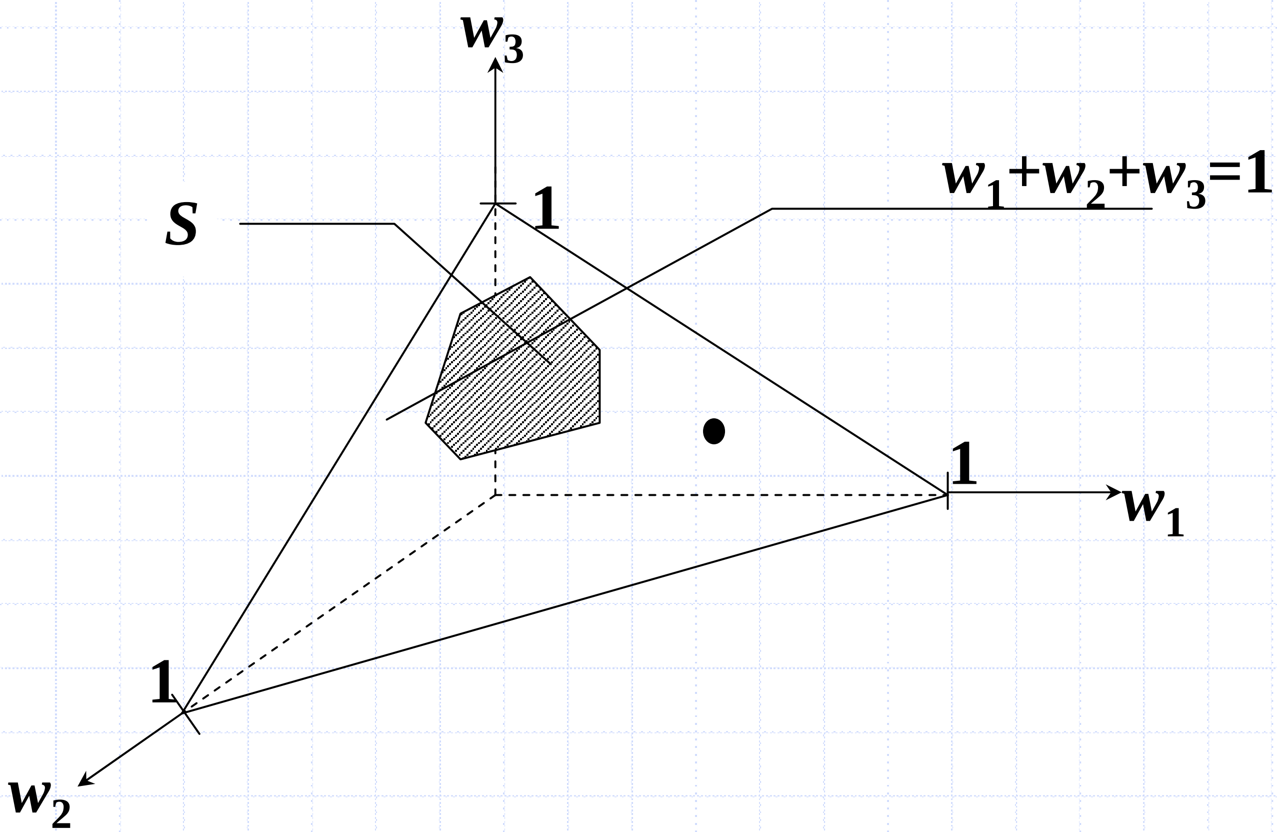


图1 区间判断矩阵权向量的可行域

为判断可行域的存在性，考虑建立LP模型：

$$\min w_0$$

$$s.t.\begin{cases} \underline{a}_{ij} w_j \le w_i, i = 1, \cdots, n-1; j = i+1, \cdots, n; \\ \bar{a}_{ij} w_j \ge w_i, i = 1, \cdots, n-1; j = i+1, \cdots, n; \\ w_1 + \cdots + w_n = 1 \\ w_0, w_1, \cdots, w \ge 0 \end{cases}$$

例 某区间判断矩阵为A（只给出上三角部分，后同），求其权向量的可行域。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & [1,2] & [2,6] \\ & 1 & [2,3] \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

解：建立LP模型

$$\min \quad w_0$$

$$s.t.\begin{cases} w_1-2w_2\le 0 \\ w_1-w_2\ge 0 \\ w_2-3w_3\le 0 \\ w_2-2w_3\ge 0 \\ w_1-6w_3\le 0 \\ w_1-2w_3\ge 0 \\ w_1+w_2+w_3=1 \\ w_0,w_1,w_2,w_3\ge 0 \end{cases}$$

化为二维 ⇒

$$\min \quad w_0$$

$$s.t.\begin{cases} w_1-2w_2\le 0 \\ w_1-w_2\ge 0 \\ 3w_1+4w_2\le 3 \\ 2w_1+3w_2\ge 2 \\ 7w_1+6w_2\le 6 \\ 3w_1+2w_2\ge 2 \\ w_0,w_1,w_2\ge 0 \end{cases}$$

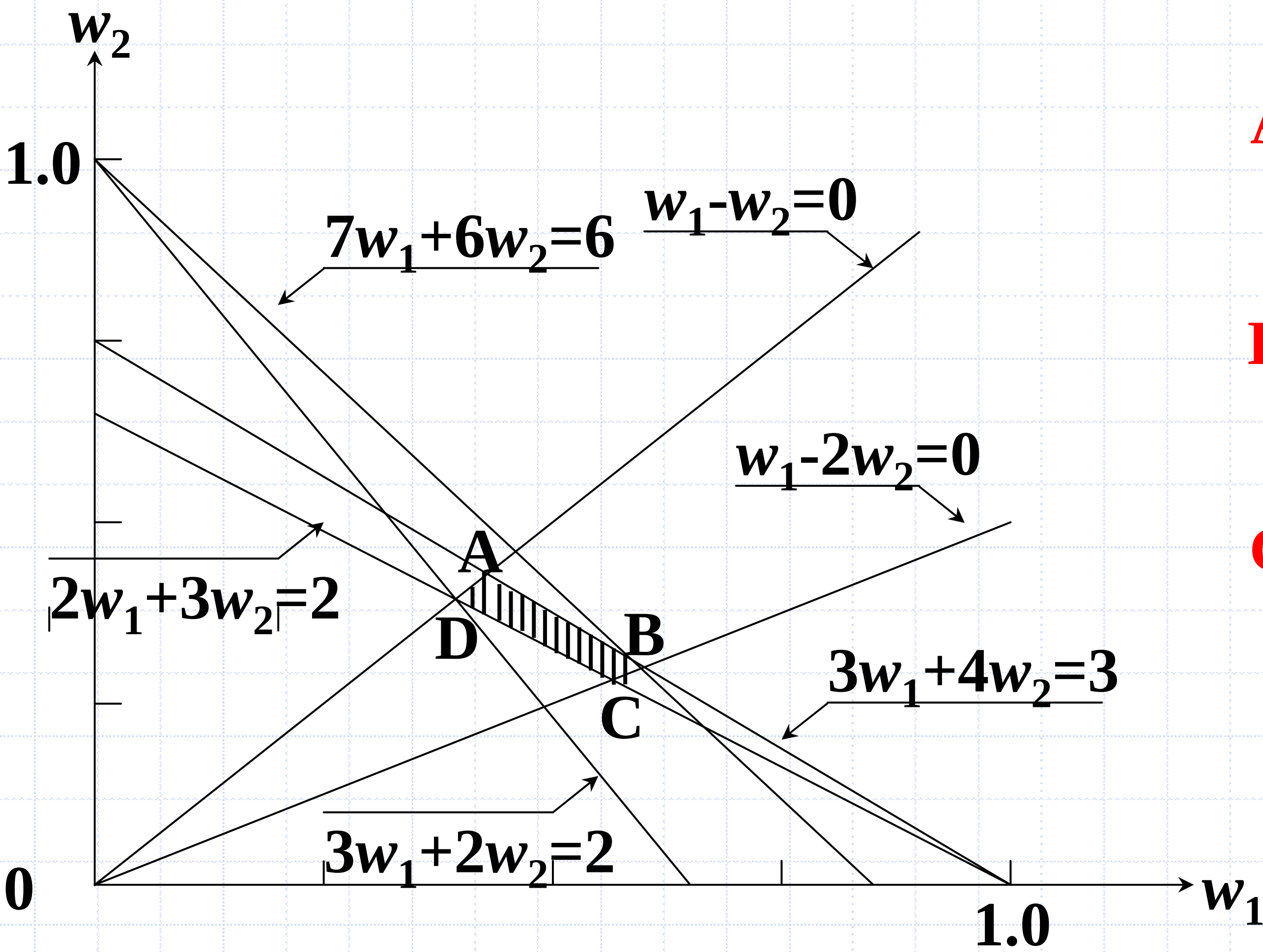


图2 区间判断矩阵A权向量的可行域

A: $\left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right)$

B: $\left(\frac{6}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$

C: $\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)$

D: $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

一致性检验:

通过权向量的可行域是否为空集

3　层次单排序的方法

- 随机抽样法

详见“许树柏，层次分析法原理，天津大学出版社，**1988** ”

- 传统单排序方法的区间扩展　如：

----区间特征根方法（区间幂法），参考“吴育华，区间层次分析法——**IAHP**，天津大学学报，**1995**，**9**：**700-705**”

----区间对数最小二乘法

----区间梯度特征向量法

- 以点推面法

通过求解数字矩阵的排序向量，再由误差传递公式计算得到最后的区间排序向量，参考

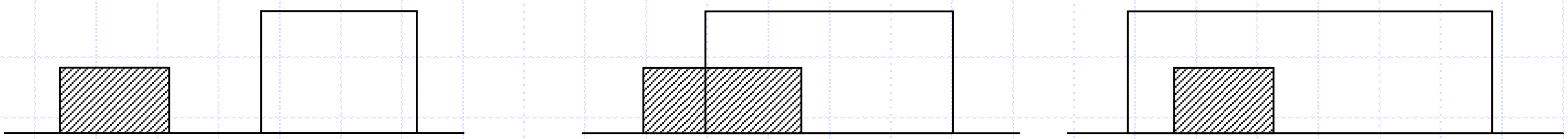
（**1**）樊治平等，不确定性判断矩阵权重计算的一种实用方法，系统工程，**1996**，**3**：**57-61**

（**2**）许先云等，不确定**AHP**判断矩阵的一致性逼近与排序方法，系统工程理论与实践，**1998**，**2**：**19-22**

4 层次总排序的问题

IAHP的最后的权重结果为一些区间数

问题：如何对之排序

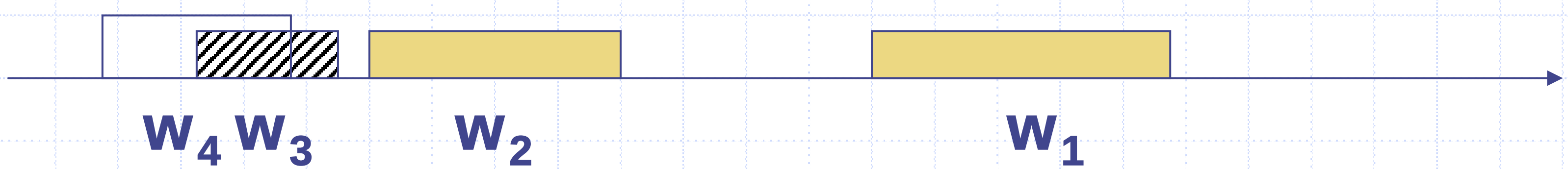


例：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & [2,4] & [3,5] & [3,5] \\ [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & 1 & [\frac{1}{2},1] & [2,5] \\ [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [1,2] & 1 & [\frac{1}{3},1] \\ [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [\frac{1}{5},\frac{1}{2}] & [1,3] & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $w_1=[0.4646, 0.5205]$ $w_2=[0.1746, 0.2443]$

$w_3=[0.1313, 0.1646]$ $w_4=[0.1117, 0.1585]$



$\therefore$ 最后排序结果 $w_1 > w_2 > w_3 > w_4$

二、区间线性规划

（**interval linear programming，简称IvLP**）

简单回顾——LP的一般模型：

$$\text{Min}\ \ Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

矩阵表示

$$\text{Min}\ \ Z = CX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} AX=b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

问题： 三种系数A、b、C不确定

解决方法： IvLP

IvLP的一般模型：

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{n}[\underline{c}_j,\bar{c}_j]x_j$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}]x_j \geq [\underline{b}_i,\bar{b}_i] & i=1,\cdots,\ m \\ x_j \geq 0 & j=1,\cdots,\ n\end{cases}$$

IvLP的求解：
- 客观的方法
- 主观的方法

1 客观方法求解IvLP

即分别求解**IvLP**的最好最优值和最差最优值，由此得到其区间最优值。

最好最优值模型：

STEP1：确定最优目标函数

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{n}\underline{c}_j x_j$$

STEP2：确定最大范围约束：

例：约束条件：$[1,2]x_1 + [1,4]x_2 \geqslant [2,4]$

边界不等式：

$1x_1 + 1x_2 \geqslant 2$

$1x_1 + 4x_2 \geqslant 2$

$2x_1 + 1x_2 \geqslant 2$

$\boxed{2x_1 + 4x_2 \geqslant 2}$

$\boxed{1x_1 + 1x_2 \geqslant 4}$

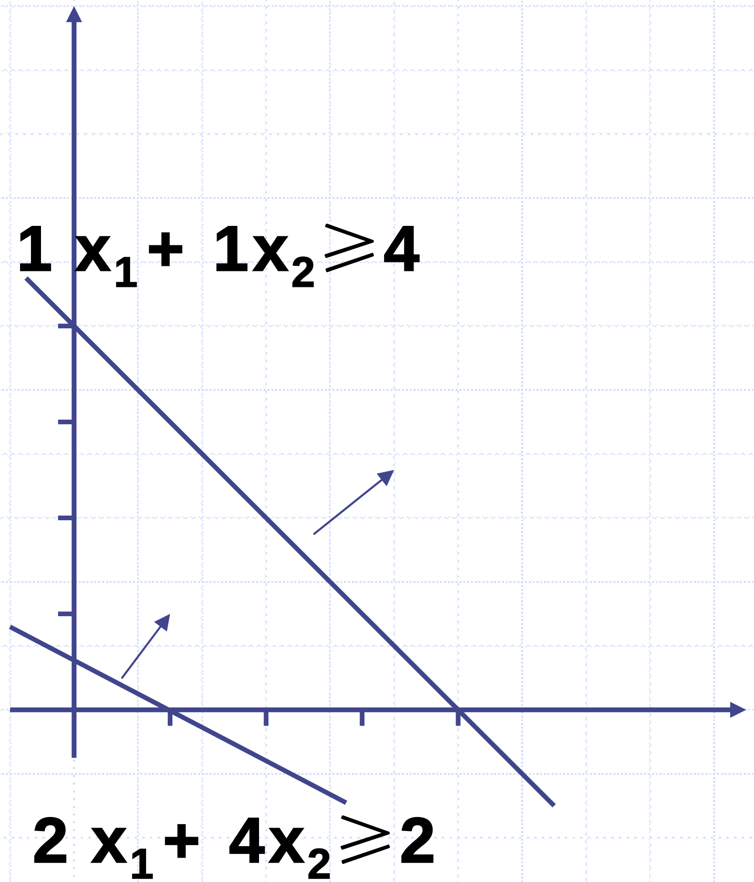
$1x_1 + 4x_2 \geqslant 4$

$2x_1 + 1x_2 \geqslant 4$

$2x_1 + 4x_2 \geqslant 4$

最大范围不等式

最小范围不等式



STEP3：确定最好最优值模型 最差最优值模型：

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{n}\underline{c}_j x_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}x_j \ge \underline{b}_i & i=1,\cdots,m\\ x_j \ge 0 & j=1,\cdots,n\end{cases}$$

最优值记为：$\underline{Z}$

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}x_j \ge \overline{b}_i & i=1,\cdots,m\\ x_j \ge 0 & j=1,\cdots,n\end{cases}$$

最优值记为：$\overline{Z}$

IvLP的最优值为:$[\underline{Z},\overline{Z}]$

例、求解IvLP的最优值区间

$$Min\ Z = 3x_1 + [1,2]x_2$$

$$st\begin{cases} [1,2]x_1 + [1,4]x_2 \geq [2,4] \\ \qquad\qquad\qquad x_2 \geq [0.25,1] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解、分别建立该IvLP的最好、最差模型：

$$Min\ Z = 3x_1 + 1x_2$$

$$st\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ \qquad\quad x_2 \geq 0.25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Min\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$st\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ \qquad x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

分别求解两LP，得IvLP的最优值区间为：[0.5,8]

2 主观方法求解IvLP

思路：基于区间数的序关系，将**IvLP**化为一确定型**LP**并求解。

两个区间数$A=<m(A),w(A)>$、$B=<m(B),w(B)>$称

$$\lambda(A\le B)=\frac{m(B)-m(A)}{w(A)+w(B)}$$ 为A≤B的满意度。

当决策者给定满意度λ_0，**IvLP**中的约束

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]x_j\ge[\underline{b}_i,\overline{b}_i] \Longleftrightarrow \lambda\left(\sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]x_j\ge[\underline{b}_i,\overline{b}_i]\right)\ge\lambda_0$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n}[(1+\lambda_0)\underline{a}_{ij}+(1-\lambda_0)\overline{a}_{ij}]x_j\ge(1-\lambda_0)\underline{b}_i+(1+\lambda_0)\overline{b}_i$$

于是，**IvLP**化为一个确定型**LP**

$$Min \quad Z' = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_j + \overline{c}_j)x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}[(1+\lambda_0)\underline{a}_{ij} + (1-\lambda_0)\overline{a}_{ij}]x_j \geq (1-\lambda_0)\underline{b}_i + (1+\lambda_0)\overline{b} \quad i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

例、给定满意度0.5，求解IvLP

$$Min\ Z = 3x_1 + [1,2]x_2$$

$$st\begin{cases} [1,2]x_1 + [1,4]x_2 \geq [2,4] \\ x_2 \geq [0.25,1] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解、化为确定型LP

$$Min\ Z = 3x_1 + 1.5x_2$$

$$st\begin{cases} 2.5x_1 + 3.5x_2 \geq 7 \\ 2x_2 \geq 1.625 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{求解}} \begin{aligned} & X^* = (0, 2)^T, \\ & Z^* = 3 \end{aligned}$$

三、区间数据包络分析

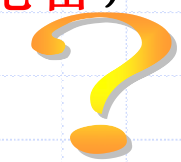
（interval DEA，简称IDEA）

n个DMU：m个投入，s个产出

	X_1	X_2	……	X_n
1	x_{11}	x_{12}	……	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	……	x_{2n}
⋮	…	…	……	…
m	x_{m1}	x_{m2}	……	x_{mn}

y_{11}	y_{12}	……	y_{1n}	1
y_{21}	y_{22}	……	y_{2n}	2
…	…	……	…	⋮
y_{s1}	y_{s2}	……	y_{sn}	s
Y_1	Y_2	……	Y_n	

问题：由于观测误差、信息不完备，导致数据不准确



1 区间DEA模型：

$$\max \quad h_0 = \sum_{r=1}^{s} \mu_r [\underline{y}_{r0}, \overline{y}_{r0}]$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \omega_i [\underline{x}_{i0}, \overline{x}_{i0}] = 1 \\ \sum_{i=1}^{m} \omega_i [\underline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij}] - \sum_{r=1}^{s} \mu_r [\underline{y}_{rj}, \overline{y}_{rj}] \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n \\ \omega_i, \mu_r \geq 0 \quad \forall i, r \end{cases}$$

对偶模型：

$$\min \ \theta$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} [\underline{X}_j, \overline{X}_j] \lambda_j \leq \theta [\underline{X}_0, \overline{X}_0] \\ \sum_{j=1}^{n} [\underline{Y}_j, \overline{Y}_j] \lambda_j \geq [\underline{Y}_0, \overline{Y}_0] \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

2　区间DEA的求解

分为客观的方法、主观的方法

- 主观的方法：基于IvLP的主观求解

- 客观的方法：

STEP1：考虑对DMU_0最有利的情形，求得 $\overline{\theta}_0$

$$
\min \theta
$$

$$
s.t.\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n}[\underline{X}_j,\overline{X}_j]\lambda_j \le \theta[\underline{X}_0,\overline{X}_0] \\
\sum_{j=1}^{n}[\underline{Y}_j,\overline{Y}_j]\lambda_j \ge [\underline{Y}_0,\overline{Y}_0] \\
\lambda_j \ge 0, j=1,\cdots,n
\end{cases}
$$

$$
\min \quad \theta
$$

$$
s.t.\begin{cases}
\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 0}}^{n}\lambda_j\overline{X}_j+\lambda_0\underline{X}_0 \le \theta\underline{X}_0 \\
\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 0}}^{n}\lambda_j\underline{Y}_j+\lambda_0\overline{Y}_0 \ge \overline{Y}_0 \\
\lambda_j \ge 0,\ j=1,\cdots,n
\end{cases}
$$

STEP2：考虑对**DMU$_0$**最不利的情形，求得 $\underline{\theta}_0$

$$\min \theta$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}[\underline{X}_j,\overline{X}_j]\lambda_j \le \theta[\underline{X}_0,\overline{X}_0] \\ \sum_{j=1}^{n}[\underline{Y}_j,\overline{Y}_j]\lambda_j \ge [\underline{Y}_0,\overline{Y}_0] \\ \lambda_j \ge 0, j=1,\cdots,n\end{cases}$$

$$\min \quad \theta$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 0}}^{n}\lambda_j \underline{X}_j + \lambda_0 \overline{X}_0 \le \theta \overline{X}_0 \\ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 0}}^{n}\lambda_j \overline{Y}_j + \lambda_0 \underline{Y}_0 \ge \underline{Y}_0 \\ \lambda_j \ge 0,\ j=1,\cdots,n\end{cases}$$

STEP3：得到**DMU$_0$**的区间效率值 $[\underline{\theta}_0,\overline{\theta}_0]$

例 求每个DMU的区间效率值

DMU	X_1	Y_1	Y_2
A	[1,2]	[4,6]	[7,8]
B	[2,3]	[4,5]	[6,8]
C	[4,6]	[30,34]	[32,34]
D	[2,4]	[10,13]	[4,5]
E	[1,3]	[27,29]	[20,21]

解、以A为例

例 求每个DMU的区间效率值

DMU	X_1	Y_1	Y_2
A	[1,2]	[4,6]	[7,8]
B	[2,3]	[4,5]	[6,8]
C	[4,6]	[30,34]	[32,34]
D	[2,4]	[10,13]	[4,5]
E	[1,3]	[27,29]	[20,21]

解、以A为例：

首先建立确定型模型，求得其最高效率值 $\overline{\theta}=1$

例 求每个DMU的区间效率值

DMU	X_1	Y_1	Y_2
A	[1,2]	[4,6]	[7,8]
B	[2,3]	[4,5]	[6,8]
C	[4,6]	[30,34]	[32,34]
D	[2,4]	[10,13]	[4,5]
E	[1,3]	[27,29]	[20,21]

解、以A为例：

首先建立确定型模型，求得其最高效率值 $\overline{\theta} = 1$

再建立确定型模型，求得其最高效率值 $\underline{\theta} = 0.17$

∴ A的区间效率值为：$\theta = [0.17\ ,1]$

计算结果:

DMU	X_1	Y_1	Y_2	区间效率值
A	[1,2]	[4,6]	[7,8]	[0.17,1]
B	[2,3]	[4,5]	[6,8]	[0.1,0.6]
C	[4,6]	[30,34]	[32,34]	[0.25,1]
D	[2,4]	[10,13]	[4,5]	[0.09,0.72]
E	[1,3]	[27,29]	[20,21]	[1,1]

3 区间DMU的评价

- 区间DMU的分类:
  - 区间有效
  - 区间部分有效
  - 区间无效

- 区间DMU的排序：

-----按区间效率值对其排序，最终归结为区间数的排序

4 区间DEA的其它研究领域

- DEA其它模型（除C^2R外）的区间扩展及其应用研究
- 投影问题
- DMU的鲁棒性分析

⋮

谢
谢！