7.3 Hermite插值
一、带导数的插值问题

在许多实际问题中，有时不仅要求插值多项式函数$P(x)$与被插值函数$f(x)$在插值节点处具有相同的函数值，而且要求具有相同的一阶导数甚至高阶导数值，即此问题是带导数的插值问题，我们把这种满足带有导数条件的插值问题称为Hermite插值问题.

例题

求一个次数不超过4次的多项式$P(x)$使得

$$P(0)=1,\quad P(1)=2,\quad P(2)=1,$$
$$P'(1)=0,\quad P'(2)=-1.$$

解： 设$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $P'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3$. 由插值条件：

$$\begin{cases} a_0 = P(0) = 1 \\ a_0+a_1+a_2+a_3+a_4 = P(1) = 2 \\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4 = P(2) = 1 \\ a_1+2a_2+3a_3+4a_4 = P'(1) = 0 \\ a_1-2a_2+3a_3-4a_4 = P'(2) = -1 \end{cases}$$

解之得，$a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=-2$, $a_4=\frac{1}{2}$. 所以，

$$P(x)=1+x+\frac{3}{2}x^2-2x^3+\frac{1}{2}x^4.$$

注：在多数情况下，求解上述方程组比较困难，寻求有效的数值求解方法$\longrightarrow$ Hermite插值法.

二、Hermite插值公式

1.

定义

设$y = f(x)$在插值节点$x_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$处的函数值$y_i = f(x_i)$, 一阶导数值$m_i = f'(x_i)$, 其中$\{x_i\} \in [a, b]$互异. 求一个次数尽可能高的多项式$P \in P_{2n+1}[a, b]$，使满足$2n + 2$个插值条件；

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad P'(x_i) = f'(x_i) = m_i, \tag{3.1}$$

$(i = 0, 1, \cdots, n)$, 称此插值问题为**Hermite插值问题**，满足此要求的插值多项式称为**Hermite插值多项式**.

注：事实上，$P(x)$**是一个次数不高于**$2n + 1$**次的多项式函数，记为：**$H_{2n+1}(x)$**.**

2. 插值多项式$H_{2n+1}(x)$的存在唯一性定理

定理（定理7.3 和定理7.4）

满足插值条件(3.1)的*Hermite*插值多项式$H_{2n+1}(x)$唯一存在，且

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{y_k+(x_k-x)\left[2y_k\sum_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{1}{x_k-x_i}-m_k\right]\right\}l_k^2(x),$$

其中$l_k(x)$是*Lagrange*插值基函数. 此外，若$f^{(2n+2)}(x)$在(a,b)内存在，则对任意给定的$x\in[a,b]$，其插值余项

$$R(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x),$$

其中$\xi\in(a,b)$且依赖于x.

三、分段插值

由书上的Runge(龙格)现象(P_{241})例子说明，在给定的区间内，并不是使用次数越高的插值多项式效果越好. 在大范围内使用高次插值, 逼近的效果往往不太理想.

高次插值多项式的缺点：计算量大，积累误差也大。局部插值节点处的函数值有微小偏差时，可能引起整个区间上的函数值很大的变化.

因而，在实际应用中，选用的插值多项式的次数一般都不会超过6、7次. 通常一般采用分段低次插值的方法来提高精确程度$\longrightarrow$ 分段线性插值、三次Hermite插值.

定义（分段线性插值）

分段线性插值就是用过(x_i, y_i) $(i = 0, 1, \cdots, n)$的折线线段近似逼近被插值曲线.
缺点：分段线性插值在节点(x_i, y_i) $(i = 0, 1, \cdots, n)$处不光滑。

为了得到比较光滑的分段插值函数，即使分段插值函数的导数也连续，可以采用分段三次Hermite插值, 即设$f(x)$在插值节点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$处的函数值为$y_i = f(x_i)$, 导数值为$m_i = f^{'}(x_i)$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$, 构造分段三次Hermite插值函数$g_h(x)$满足

(1) $g_h \in C^1[a, b]$;

(2) $g_h(x_i) = y_i$, $g_h^{'}(x_i) = m_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$;

(3) $g_h(x)$在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上为三次多项式.

注：分段三次Hermite插值比分段线性插值光滑性好，而且在逼近效果程度上比分段线性插值要好一些. 可以证明: 当$f \in C^4[a, b]$时，$g_h(x)$在区间$[a, b]$上一致收敛于被插值函数$f(x)$.

7.4 三次样条插值

三次Hermite插值函数在整个区间$[a, b]$上具有连续的一阶导数(即插值函数曲线是光滑曲线)，但在插值节点处的二阶导数往往是不存在的.

因此，三次Hermite插值不能解决要求更高光滑性(例如要求插值函数二阶连续可导)的插值问题. 由此，提出了三次样条插值(具体内容可参见P_{260}定义7.1).