4.2 方阵序列和方阵级数
一、方阵序列收敛的充要条件及其性质

定义（方阵序列收敛）

设$\{A_m=[a_{ij}^{(m)}]\}$是$\mathbb{C}^{n\times n}$中的方阵序列，$A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 序列$\{A_m\}$依范数$\|\cdot\|$收敛于$A$是指:

$$\lim_{m\to\infty}\|A_m-A\|=0.$$

记为: $\lim_{m\to\infty}A_m=A$.

定理

(1) **(定理4.1)** $\lim_{m\to\infty}A_m=A\iff\forall i,j=1,2,\cdots,n$，都有$\lim_{m\to\infty}a_{ij}^{(m)}=a_{ij}$;

结论（收敛方阵的性质，定理4.2）

(1) 若$\lim_{m\to\infty} A_m = A$，$\lim_{m\to\infty} B_m = B$，则 $\lim_{m\to\infty} A_m B_m = AB$；

(2) 设$\lim_{m\to\infty} A_m = A$, 若$A^{-1}, A_m^{-1}$ $(m = 1, 2, \cdots)$ 都存在, 则

$$\lim_{m\to\infty} A_m^{-1} = A^{-1}.$$

定理

(2) **(定理4.3)** 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 由方阵$A$的方幂$A^0 = E, A, A^2, \cdots,$ $A^m, \cdots$ 构成的方阵序列$\{A^m\}$收敛于零矩阵$O \Longleftrightarrow \rho(A) < 1$;

(3) **(推论)** 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若存在一种方阵范数$\|\cdot\|$, 使得 $\|A\| < 1 \Longleftrightarrow \lim_{m\to\infty} A^m = O$.

二、方阵级数收敛的充要条件及其性质

定义（方阵级数收敛）

对任意的n阶方阵序列$\{A_m\}$，称

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

为一个**方阵级数**. 此方阵级数收敛于某个方阵$S = [s_{ij}]_{n\times n}$是指其部分和序列$\{S_N = \sum_{m=0}^{N} A_m\}$收敛于$S$, 即

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S.$$

定理

(1) **(定理4.4)** 方阵级数$\sum_{m=0}^{\infty} A_m$收敛于$S \Longleftrightarrow$ 对$\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$，都有$\sum_{m=0}^{\infty} a_{ij}^{(m)}$收敛于$s_{ij}$；

(2) **(定理4.5)** 方阵级数$\sum_{m=0}^{\infty} A_m$绝对收敛$\Longleftrightarrow$ 对$\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$，都有$\sum_{m=0}^{\infty} a_{ij}^{(m)}$绝对收敛.

结论 (收敛级数和绝对收敛级数的性质(见书P_{138}))

(1) **(性质1)** 方阵级数$\sum_{m=0}^{\infty} A_m$绝对收敛$\Longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} A_m$收敛;

(2) **(性质2)** 方阵级数$\sum_{m=0}^{\infty} A_m$(绝对)收敛$\Longrightarrow \forall P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则$\sum_{m=0}^{\infty} PA_mQ$ 也(绝对)收敛, 且

$$\sum_{m=0}^{\infty} PA_mQ = P(\sum_{m=0}^{\infty} A_m)Q;$$

(3) 若级数$\sum_{m=0}^{\infty} A_m$收敛$\Longrightarrow \lim_{m\to\infty} A_m = O$.

三、方阵幂级数

定义（4.4 方阵幂级数）

设$X \in \mathbb{C}^{n\times n}$，形如

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m = c_0 E + c_1 X + \cdots + c_m X^m + \cdots$$

的矩阵级数称为方阵X的**幂级数**，其中$c_m \in \mathbb{C}$称为第m 项系数.

(1) 当$X = A$时，若$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$收敛(或绝对收敛)，则称$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$在$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$处收敛(或绝对收敛),或称$A$为幂级数的一个收敛点，其和记为$f(A)$, 即$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$.

(2) $\forall A \in \Omega \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$，若$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$在$A$处都收敛(或绝对收敛)，则称此幂级数在$\Omega$内收敛(或绝对收敛)，其和$f(X)$称为$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$ 的和函数.

注：方阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$的收敛域是$\mathbb{C}^{n\times n}$中的一个球形域.

定理（4.6 判断方阵幂级数收敛的方法）

设复幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$的收敛半径为$R$，方阵$X \in \mathbb{C}^{n\times n}$的谱半径为$\rho(X)$, 则

(1) 当$\rho(X) < R$时，方阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$绝对收敛；

(2) 当$\rho(X) > R$时，方阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$发散；

(3) 当$\rho(X) = R$时，无法判断.

例题

设$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，试证：$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{3^k}$收敛.

结论（见书P_{141}）

(1) **(推论1)** 复幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$在整个复平面内都收敛$\Longrightarrow$ 方阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$在全空间$\mathbb{C}^{n\times n}$ 内都收敛，且绝对收敛；

(2) **(推论2)** 复幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-\lambda_0)^m$的收敛半径为$R \Longrightarrow$ 若$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的所有特征值都满足$|\lambda_i - \lambda_0| < R$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$,则方阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (A-\lambda_0 E)^m$都绝对收敛.

若X存在一个特征值λ_k，使得$|\lambda_k - \lambda_0| > R$，则方阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (A-\lambda_0 E)^m$发散.

结论

(1) **(推论3)(例4.2)** 方阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} A^m$绝对收敛$\Longleftrightarrow$ $\rho(A) < 1$, 且该方阵幂级数的和为$(E - A)^{-1}$.

(2) **(推论4)(例4.2)** 对于方阵A，若方阵范数$\|A\| < 1 \Longrightarrow$ $E - A$非奇异，且$\|(E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$.