# 一、矩阵的Jordan标准形

对于一般的数字方阵，不是所有的矩阵都能够对角化. 若不能相似于一个对角形矩阵，但是能够相似于类似对角形矩阵的一类矩阵，即为：Jordan标准形.

**定义（2.11 Jordan块）**

*形如*

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

*的方阵称为Jordan块，其中$\lambda_i \in \mathbb{K}$. 由于$\lambda E - J_i$的初等因子组只有$(\lambda - \lambda_i)^n$，因而称$J_i$为属于$(\lambda - \lambda_i)^n$的Jordan块.*

**定义 (2.11 Jordan标准形)**

*由若干个Jordan块组成的分块对角阵(准对角形矩阵):*

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix} = diag(J_1, \cdots, J_s),$$

*称为Jordan标准形.*

注: 对角形矩阵是一类特殊的Jordan标准形.

## 定理

- **(定理2.15)** *任意的矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$都相似于一个Jordan标准形，并称它为矩阵$A$的Jordan标准形. 若不考虑Jordan块的排序，则$A$的Jordan标准形式唯一.*
- **(定理2.16)** *矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$相似于对角阵$\Longleftrightarrow \lambda E - A$的初等因子都是一次方幂.*

## 结论

*对于矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，若$\lambda E - A$的初等因子组为$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{n_s}$，且$J_i$是属于$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}(i=1,\cdots,s)$的Jordan块. 则*

$$A \sim J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix} = diag(J_1, \cdots, J_s).$$

## 求解矩阵$A$的Jordan标准形的方法

(1) 由初等变换求出方阵$A$特征矩阵$\lambda E - A$的初等因子组

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\quad (\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s};$$

(2) 写出相应每个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}(i=1,\cdots,s)$的Jordan

块$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$;

(3) 把全部的Jordan块组合起来，可得$A$的Jordan标准

形$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$.

**例题**

$$(1)A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(2)A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*分别求上述矩阵A的Jordan标准形.*

**解:** (1) 因为

$$\lambda E - A \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

所以，$\lambda E - A$的初等因子组为: $\lambda - 1,\quad (\lambda - 2)^2$.
对应于$\lambda - 1$的Jordan块为$[1]$;
对应于$(\lambda - 2)^2$的Jordan块为$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
因而矩阵$A$的Jordan标准形为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**解:** (2) 设

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\quad 则\quad A=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}.$$

由于，$\lambda E-A_1\cong\begin{bmatrix}1&0\\0&\lambda^2+1\end{bmatrix}$，因此$A_1$的初等因子组为: $\lambda-i,\lambda+i$. 所以，对应于$A_1$的Jordan标准形为$\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}$;

同理，对应于$A_2$的Jordan标准形为$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 进而，可得$A$的Jordan标准形为：

$$A\sim J=\begin{bmatrix}i&0&0&0&0\\0&-i&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}.$$

# 二、有理标准形

**定义 (2.12 相伴矩阵)**

*对于首1的n次多项式*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

*称n阶方阵*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_n \\ & & & & -a_{n-1} \\ & & E_{n-1} & & -a_{n-2} \\ & & & & \vdots \\ & & & & -a_1 \end{bmatrix}$$

*为$\varphi(\lambda)$的相伴矩阵.*

## 结论

(1) **(定理2.17)** *对于$n$阶方阵$A$, 若特征矩阵$\lambda E-A$的不变因子为*$d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$, $d_n(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$, *则*$A\sim C$.

(2) *对于$n$阶方阵$A$，若特征矩阵$\lambda E-A$的不变因子为*$\varphi_1(\lambda),\varphi_2(\lambda),\cdots,\varphi_s(\lambda)$，*其中*

$$\varphi_i(\lambda)=\lambda^{n_i}+a_{i1}\lambda^{n_i-1}+\cdots+a_{in_i-1}\lambda+a_{in_i}\quad(\sum_{i=1}^{s}n_i=n).$$

*设$C_i$为$\varphi_i(\lambda)$的相伴矩阵，则*$A\sim C=diag(C_1,C_2,\cdots,C_s)$.

**注：若不计**$C_i\ \ (i=1,\cdots,s)$**的排列顺序外，**$C$**是唯一确定的．此时，称**$C$**为**$A$**的有理标准形**.

## 例题

*求矩阵*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*的有理标准形.*

**解:** 设

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{则} \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

*通过上面的例(2)，可知*$\lambda E - A_1$*的初等因子组为:*
$\lambda - i, \lambda + i$，$\lambda E - A_2$*的初等因子组为:* $\lambda + 1, \lambda + 1, \lambda - 2$.

## 例题

*因此*$\lambda E - A$*的初等因子组为*

$$\lambda - i, \lambda + i, \lambda + 1, \lambda + 1, \lambda - 2.$$

*进而，*$\lambda E - A$*的不变因子为:*
$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = d_3(\lambda) = 1, \quad d_4(\lambda) = \lambda + 1,$
$d_5(\lambda) = (\lambda + i)(\lambda - i)(\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2.$
*所以, 矩阵*$A$*的有理标准形为:*

$$A \sim J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$