2.1 方阵的特征值与特征向量

一、方阵的特征值和特征向量

定义 (2.1 特征值和特征向量)

设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}, \lambda\in\mathbb{C}$，若存在非零向量$x\in\mathbb{C}^n$, 使得$Ax=\lambda x$成立，则数$\lambda$称为$A$ 的一个特征值，非零向量x称为矩阵A对应于(或属于)特征值λ的特征向量.

注：

(1) 对应于同一个特征值的特征向量不是唯一的；

(2) 同一特征值下特征向量的非零线性组合仍然为特征向量，即若$x_1, x_2, \cdots, x_m$是矩阵A属于特征值λ的特征向量，则它们的非零线性组合$x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m$ 也是属于λ的特征向量;

(3) 方阵A的所有特征值之和为$\sum_{i=1}^n a_{ii}$，所有特征值之积为$\det A$.

定义（特征矩阵，特征多项式和特征方程）

设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则通过$Ax=\lambda x$可得$(\lambda E-A)x=0$,即

$$\begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

称矩阵$\lambda E-A$为n阶方阵A的**特征矩阵**; 行列式

$$f(\lambda):=\det(\lambda E-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$$

是一个关于λ的n 次多项式, 其
中$a_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$， $a_n=(-1)^n detA$, 称之为矩阵A的**特征多项式**; 称方程$\det(\lambda E-A)=0$为A的**特征方程**. 矩阵A的所有不同特征值的全体称为A的**谱**，记为$\sigma(A)$.

注：

(1) λ是n阶方阵A的特征值$\Longleftrightarrow$ λ是特征方程$\det(\lambda E - A) = 0$的根.

(2) 若重根以重数计算，则n阶方阵A具有n个特征值，但特征值可能为复根.

有关特征值与特征向量的结论，见书P_{41}.

(1) 若$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$n$阶方阵$A$的特征值，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

称$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$为矩阵A的**迹**，记为$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$;

(2) λ是方阵A的特征值$\Rightarrow$ λ^m是方阵A^m的特征值; 若A可逆，则$\frac{1}{\lambda}$为A^{-1}的特征值;

(3) 对应不同特征值下的特征向量线性无关.