1.5 线性算子
一、线性算子及其性质

定义 (1.19 线性算子)

设X和Y是数域$\mathbb{K}$上的线性空间，若映射$T: X \to Y$ 满足条件：

(1) $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$,

(2) $T(\lambda x) = \lambda Tx \quad (\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$,

则称映射T是线性的,通常将线性映射叫做线性算子.

注: (1). 若$Y = X$, 则称T为X上的线性变换;
(2). 若$Y = \mathbb{K}$, 则称T为X上的线性泛函;
(3). T是线性算子$\Longleftrightarrow T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

例题

(1) 线性空间X上的恒等算子I(即$Ix = x, \quad \forall x \in X$)是一个线性算子.

例题

(2) 线性空间X上的零算子$O : x \mapsto o, \quad \forall x \in X$是一个线性算子.

(3) 对于积分算子$T : C[0,1] \to C[0,1]$, 定义如下:

$$(Tf)(x) := \int_0^x f(t)dt \quad (\forall f \in C[0,1], \ \ \forall x \in [0,1]),$$

则积分算子T是一个线性算子.

(4) 由矩阵$A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$确定的映射$T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$为:

$$Tx = Ax \in \mathbb{C}^m \ \ (\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n),$$

则算子T是一个线性算子.

定理 (1.7)

设X和Y是数域$\mathbb{K}$上的线性空间，算子$T: X \to Y$是线性算子. 则

(1) $T(o) = o, \quad T(-x) = -Tx \quad (\forall x \in X)$;

(2) $T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(x_i)$;

(3) 若$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是$X$中的线性相关集，则$\{T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)\}$是$Y$中的线性相关集，反之不成立.

定义 (定义1.20 零空间)

设X和Y是数域$\mathbb{K}$上的线性空间，$T: X \to Y$ 是线性算子.
记$\mathcal{N}(T) := \{x \in X | \ Tx = o\}$, 则可验证$\mathcal{N}(T)$为$X$的线性子空间，并称$\mathcal{N}(T)$为算子$T$的零空间或算子$T$的核.

二、线性算子的矩阵表示

有限维空间上的线性算子都可以通过矩阵来表示.

设X和Y是数域$\mathbb{K}$上的线性空间，且$\dim X = n, \dim Y = m$.
$\forall x \in X$，记$y = Tx \in Y$. 取定X, Y的一个基分别为

$$B_X = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}, \quad B_Y = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\},$$

则有唯一的表达式

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \quad y = \sum_{i=1}^{m} y_i u_i.$$

于是，

$$y = Tx = T(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j),$$

而$T(e_j) \in Y$, 则$\forall j = 1, 2, \cdots, n$有

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i.$$

所以有

$$y = Tx = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) u_i,$$

从而有

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

若记$A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{C}^{m\times n}$，则有$y = Ax$. 这说明，在取定基的情况下，对于任意的$x \in X$在线性算子$T$下的像与用矩阵$A$去乘$x$的结果是一样的. 因此, 称矩阵$A$是算子$T$在基$B_X$和$B_Y$下的矩阵.
反之，在X和Y取定基的情况下，$\forall A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$,由上面的矩阵形式确定了唯一的一个从$X$到$Y$的线性算子.

注:

(1) n**维线性空间上线性变换的矩阵表示是一个**n**阶方阵**;

(2) **同一线性算子在不同基下的矩阵表示一般是不同的；但是，零算子在任何基下的矩阵表示总是零矩阵；恒等算子在的任何基下的矩阵表示都是单位矩阵**.