§2 二人有限非零和博弈

一、非零和博弈的一般表达

1、局中人集合：$i = 1, 2, \ldots, n$

2、每个局中人的策略集：$S_i\ (i = 1, \cdots, n)$

3、每个局中人的赢得函数：$u_i(s_1, \cdots, s_i, \cdots s_n)$

博弈的一般表达：$G=\{S_1, \cdots S_n; u_1, \cdots u_n\}$

二、纳什均衡

均衡（Equilibrium）是所有局中人的最优策略的组合，一般记为：

$$s^* = (s_1^*, \cdots, s_i^*, \cdots, s_n^*)$$

其中，s_i^* 是第i个局中人在均衡情况下的最优战略，即

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall s_i' \neq s_i^*$$

（$s_{-i} = (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_n)$ 表示除 i 之外所有局中人的策略组成的向量。）

$s^* = (s_1^*, \cdots, s_i^*, \cdots, s_n^*)$ 表示n个局中人达成的一个协议，当这个协议可以自动实施（Self-enforcing）时，即没有任何局中人有积极性破坏这个协议，那么这个协议就构成纳什均衡。

否则，若至少存在某些局中人有积极性偏离这个协议，就构不成纳什均衡。

例：囚犯困境问题：

		II 坦白	II 抵赖
I	坦白	-8，-8	0，-10
I	抵赖	-10，0	-1，-1

例：智猪博弈问题：

		小猪 按	小猪 等待
大猪	按	5，1	4，4
大猪	等待	9，-1	0，0

例：（夫妇之争）夫妇俩商量晚上去哪里消遣。丈夫喜欢看足球比赛，而妻子喜欢去看芭蕾舞表演，夫妇都希望二人同往，不愿分开。

		妻子 芭蕾	妻子 足球
丈夫	芭蕾	1，4	0，0
丈夫	足球	0，0	4，1

纳什均衡解：（足球，足球）或（芭蕾，芭蕾）

✓ 解纳什均衡的划线法

设有两个局中人：A和B

Step 1: 考虑A，给定B的每一个策略，找出A的最优策略，并在其对应的赢得下面画一横线。

Step 2: 用类似的方法，找出B的最优策略。

Step 3: 都画横线的单元格即为纳什均衡。

例：求纳什均衡

局中人B

		L	C	R
局中人A	U	0， 4	4， 0	5， 3
	M	4， 0	0， 4	5， 3
	D	3， 5	3， 5	6， 6

纳什均衡

总结:对矩阵A，按列求最大；对矩阵B，按行求最大。

例：斗鸡博弈（Chicken Game）

两个人举着火棍从独木桥的两端走向中央进行火拼。每个人都有两种策略：继续前进，或退下阵来。若两人都继续前进，则两败俱伤；若一方前进另一方退下来，前进者取得胜利，退下来的丢了面子；若两人都退下来，两人都丢面子。赢得矩阵如下表所示。

		B 进	B 退
A	进	-3，-3	2，0
A	退	0，2	0，0

Nash均衡：一进一退

斗鸡博弈的应用

冷战期间，美苏在世界各地抢占地盘，如果一方已经抢占了一块地盘，另一方就设法占另一块地盘，而不是与对手竞争同一块地盘。

警察与游行队伍。

夫妻吵架。一般来说，吵得厉害了，不是妻子回娘家躲一躲，就是丈夫到院子里抽支烟。

斗鸡博弈的问题：谁退？两败俱伤亦有可能。

纳什均衡在经济中的应用举例之例一

公共地的悲剧（**Tragedy of the commons**）

如果一种资源没有排他性的所有权，就会导致对这种资源的过渡使用。

考虑一个有n个农民的村庄共同拥有一片草地，每个农民都有在草地上放牧的自由。每年春天，每个农民要决定自己杨多少只羊。用g_i表示第i个农民饲养的数量，

$G=\sum_{i=1}^{n} g_i$ 表示总数量；v代表每只羊的平均价值。v是G的

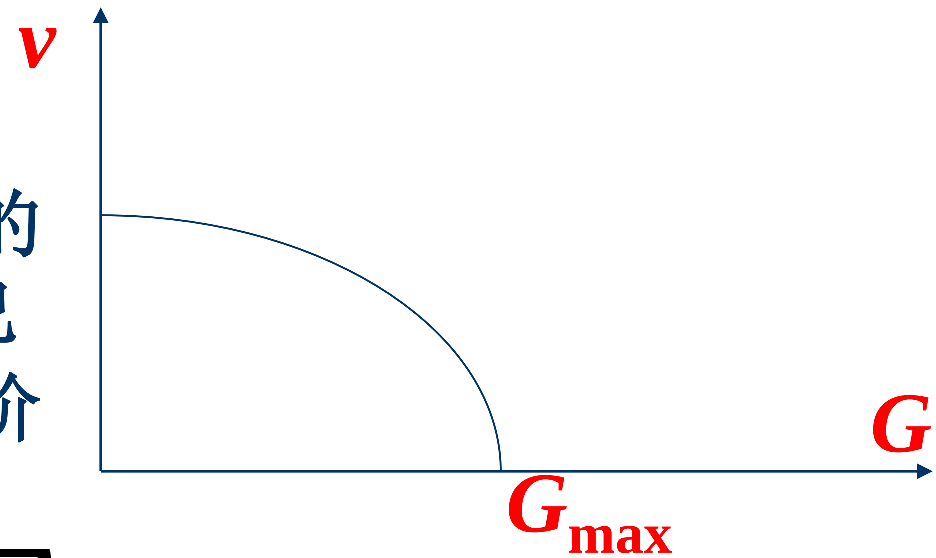
函数： $v=v(G)$ 。因为每只羊至少要一定数量的草才

不至于饿死，有一个最大可存活的数量$G_{\max}$：当

$G<G_{\max}$时，$v(G)>0$； 当$G\geq G_{\max}$时，$v(G)=0$。

当草地上的羊很少时，增加一只羊也许不会对其它羊的价值有太大的不利影响，但随着饲养量的不断增加，每只羊的价值会急剧下降，因此：

$$\frac{\partial v}{\partial G}<0;\ \frac{\partial^2 v}{\partial G^2}<0$$



在该博弈中，每个农民的问题是选择g_i以最大化自己的利润。设购买每只羊的价格为c，则利润函数为：

$$\pi_i(g_1,\cdots,g_i,\cdots,g_n)=g_i v(\sum g_i)-g_i c\ ;\quad i=1,\cdots,n$$

最优化的条件为：$$\frac{\partial \pi_i}{\partial g_i}=v(G)+g_i v'(G)-c=0;\quad i=1,\cdots,n$$

上述n个优化函数的交叉点就是纳什均衡。

可以证明，纳什均衡的总饲养量大于社会最优的饲养量。

具体示例：设n=3，设每只羊的利润函数为

$$v(G)=100-G=100-(g_1+g_2+g_3)$$ ，设c =4

则3个农民的利润函数分别为：

$$\pi_i=g_i[100-(g_1+g_2+g_3)]-4g_i\ ;\ i=1,2,3$$

令 $\dfrac{\partial \pi_i}{\partial g_i}=0;\quad i=1,2,3$ ，并解联立方程组可得

$g_1^*=g_2^*=g_3^*=24$,带入利润函数得 $\pi_1^*=\pi_2^*=\pi_3^*=576$

换个角度，从总体利益最大化出发，总利润函数为：

$$\pi=G(100-G)-4G=96G-G^2$$

令 $\dfrac{d\pi}{dG}=0$ ⇒ $G^*=48,\pi^*=2304$

结论：(1)Nash均衡条件下，养羊总数24×3= 72，总利润576×3=1728；

（2）总利益最大条件下：养羊总数48，总利润 2304。

三、 混合策略的纳什均衡

纯策略：确定的选取某个策略

混合策略：以某一概率分布选取各个策略

✓ 问题的提出——纯策略意义下，有可能不存在纳什均衡

三、 混合策略的纳什均衡

例：小偷与守卫的博弈（泽尔腾，1996）

一小偷欲偷窃有一守卫看守的仓库，如果小偷去偷窃时守卫在睡觉，则小偷就能得手，否则要被抓住。假设小偷得手可偷得价值为V 的赃物，若被抓住坐牢，负效用$-P$。再设守卫睡觉而未被偷则有S 的正效用，睡觉遭偷则要被解雇，负效用$-D$。若小偷不偷，则无得无失，守卫不睡则出一份力争一份工资，无得无失。

		守卫：睡	守卫：不睡
小偷	偷	V，$-D$	$-P$，0
	不偷	0，S	0，0

无纳什均衡

案例分析——“非典”疫情扩散和防治

背景：

2003年4月，流行性非典型肺炎从广东省通过输入性病例的传播进入北京。在华北地区“非典”疫情爆发初期，由于没有有效地进行预防和控制，疫情迅速扩散和蔓延，很快就开始在更广泛的区域内传播。这种局面的出现，和SARS具有极强的传染性有关，也与防治工作不力有关。由于政府的监管力度不够，少数医生逃避责任，医院之间也产生一种互相推诿病人的博弈关系。随着疫情的发展，中央政府采取果断措施，加强了领导和监管力度，逐步扭转了这种不利的局面。

疫情爆发初期的情况：

在北京爆发SARS的初期，重症患者出现死亡，给医护人员带来巨大恐慌，个别医院怕自己的医护人员感染和影响单位经济效益，拒收患者。当时情况下，由于对“非典”缺乏科学认识，政府对其严重性也认识不足，政府对医院没有建立严格有效的监管体制。医院面对的局面是一种“囚徒困境”式的博弈问题。

		医院2	
		拒收	救治
医院1	拒收	0，0	0，-1
	救治	-1，0	-0.5，-0.5

均衡解：

（拒收，拒收）

结果：疫情扩散，影响到人民健康和社会稳定

疫情防治：

在疫情发展过程中，随着对SARS的逐步了解，政府及时总结经验教训，迅速出台一系列措施和规定来扭转当时的不利局面，如实行首诊负责制，对拒收发热病人的医院严惩不贷。如果医院不收治非典病人和疑似病人，将受到严厉的惩罚和面临强大的舆论压力。此时两个医院之间的博弈为：

医院2

医院1		拒收	救治
	拒收	-M，-M	-M，-1
	救治	-1，-M	-0.5，-0.5

均衡解：

（救治，救治）

结果：疫情得到控制