1. 设$\rho(t)>0$是区间$[a,b]$上的连续函数，在线性空间$C[a,b]$上定义二元函数：

$$(f,g)_\rho=\int_a^b \rho(s)f(s)\overline{g(s)}ds, \qquad \forall f,g\in C[a,b]$$

证明：$(C[a,b],(\cdot,\cdot)_\rho)$是内积空间，并指出它是否为 Hilbert 空间。

2. 设$(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$是实空间，$\lambda_j>0,\quad j=1,2,\ldots,n,\ t_j\in[a,b],\ j=1,2,\ldots,n$是一组互不相同的点，定义函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x(t_k), \qquad \forall x\in C[a,b],$$

试证：（1） f 是$(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$到$\mathbf{R}$的映射，即 $f(x)\in\mathbf{R}$；

（2） f 是线性的；　（3） f 是有界的；　（4）求$\|f\|$。

3. 在$C[0,2]$上考虑积分方程

$$x(t)-\int_0^t \sin(t-s)x(s)ds=y(t), \qquad y\in C[0,2]$$

证明：对任意的$y\in C[0,2]$，该积分方程都存在唯一连续解$x(t)\in C[0,2]$。

4. 设 $K(t,s)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上 的 连 续 函 数 ， 且 满 足 条 件 $\max\limits_{a\le t\le b}\int_a^b dr\int_a^b |K(t,s)K(s,r)|ds<1$，$y(t)$是$[a,b]$上的连续函数。

证明: 积分方程　$x(t)-\int_a^b K(t,s)x(s)ds=y(t)$　在$C[a,b]$中存在唯一解。

5. 设 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 矩 阵， 矩 阵 A 确 定 了 一 个 从 空 间 $X=(C^n,\|\cdot\|_1)$ 到 空 间 $Y=(C^n,\|\cdot\|_\infty)$的算子。

(1) 证明 A 是有界线性算子，

(2) 求出 A 的范数。

6. 设 $C[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数组成的线性空间，在 $C[a,b]$ 上定义

$$\| f \|_2 = \left(\int_a^b | f(x) |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f \in C[a,b]$$

证明 $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ 是赋范线性空间，并判断它是否为完备空间。

7. 设 $f(t) \in C[0,2]$，证明：积分方程

$$x(t) - \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} x(s) ds = f(t)$$

在 $C[0,2]$ 中存在唯一解。

8. 设 $C^1[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数构成的线性空间，在 $C^1[a,b]$ 上定义二元函数

$$(f,g) = \int_a^b [f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)}] dt, \qquad \forall f,g \in C^1[a,b]$$

（1） 验证 (f,g) 满足内积公理，从而 $(C^1[a,b], (\cdot,\cdot))$ 是内积空间；

（2） 确定由此内积导出的范数；

（3） 证明： 对 $\forall f,g \in C^1[a,b]$，下面的不等式成立

$$\left(\int_a^b (| f(t)+g(t) |^2 + | f'(t)+g'(t) |^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b (| f(t) |^2 + | f'(t) |^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b (| g(t) |^2 + | g'(t) |^2) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

9. 设 $\rho(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，定义 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbf{R}$ 的映射 F 如下

$$F(x) = \int_a^b \rho(t) x(t) dt, \quad \forall x \in C[a,b]$$

证明：（1） $F: C[a,b] \to \mathbf{R}$ 是有界线性算子；

（2）若 $a=0, \rho(t) = t^2 e^t$，求出 $\| F \|$。

10. 在实线性空间$C[a,b]$上定义范数

$$\|x\|_* = \max_{t\in[a,b]} |e^t x(t)|.$$

证明：$(C[a,b], \|\cdot\|_*)$ 是完备的。

11. 教学参考 P45 例 2.3.1。

12. 设H是 Hilbert 空间，M是H的闭子空间，定义 投影算子$P: H \to M$，对任意的$x \in H$，Px表示x在M上的投影。

证明：投影算子P是H上的有界线性算子，且有$\|P\| = 1$。